4. METOD SIMULTANIH JEDNAČINA

4.1 Uvod

U delu **2**. su razmatrani linearni regresioni modeli koji se sastoje od samo jedne jednačine koja povezuje jednu nezavisnu promenljivu, odnosno promenljivu koja se objašnjava, sa u principu većim brojem nezavisnih promenljivih koje se mogu smatrati zadatim u datom problemu, odnosno pomoću kojih se objašnjava zavisna promenljiva. Međutim, u analizi ekonomskih pojava često se javlja slučaj da se više zavisnih promenljivih objašnjavaju pomoću većeg broja nezavisnih promenljivih. U tom slučaju, liearni model se sastoji od odgovarajućeg broja simultanih jednačina čijim se rešenjem dolazi do traženih vrednosti zavisnih promenljivih. Takođe, često imamo slučaj da zavisna promenljiva vrši povratni uticaj na neku od nezavisnih promenljivih. Na primer, količina prodaje datog proizvoda se može izraziti na sledeći način:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2\mathbf{X}_2 + \mathbf{b}_3\mathbf{X}_3 + \mathbf{b}_4\mathbf{X}_4 + \varepsilon \qquad (4.1)$$

gde su:

Y - veličina prodaje
$\mathbf{X}_2$ - cena proizvoda
$\mathbf{X}_3$ - dohodak po glavi stanovnika
$\mathbf{X}_4$ - troškovi ekonomske propagande (reklame).

S druge strane, cena od tog istog proizvoda na primer povratno zavisi od veličine prodaje, tj.:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{Y} + \mathbf{a}_3\mathbf{X}_4 + \varepsilon_2 \qquad (4.2)$$

Jednačine (4.1) i (4.2) čine sistem simultanih jednačina koji obezbeđuje dvostrani uticaj : cene na veličinu prodaje i obrnuto.

Prema tome, model simultanih jednačina je u stanju da opisuje složenije međusobne odnose promenljivih koje opisuju neku pojavu, uvođenjem onog broja jednačina koliko je potrebno za predstavljanje međusobnih veza.

Uobičajena praksa je da se u modelu simultanih jednačina, promenljive koje se objašnjavaju tj. zavisne promenljive nazivaju endogene promenljive i one se određuju u modelu. Promenljive koje su određene van ovog modela i koje se smatraju zadatim, nazivaju se egzogene promenljive. U jednom modelu simultanih jednačina zadatim se smatraju i endogene promenljive sa kašnjenjem jer se one sračunavaju u prethodnom vremenskom periodu.

U korišćenju modela simultanih jednačina za opisivanje ekonomskih pojava razlikujemo sledeća tri aspekta.

1) **Model mora biti matematički kompletan**. Pod ovim se podrazumeva da ako su poznate egzogene promenljive, strukturni parametri modela kao i član koji opisuje slučajna odstupanja, moguće je naći jedinstveno rešenje za endogene promenljive. Iz ovog sledi da model mora da ima onoliko nezavisnih jednačina koliko ima endogenih promenljivih.

2) **Model se mora identifikovati** u smislu da ako su poznate egzogene promenljive, endogene promenljive i član koji opisuje slučajne greške, moguće je jedinstveno odrediti strukturne parametre. Za model se kaže da je neidentifikovan (ili podidentifikovan) kad različiti skupovi egzogenih promenljivih i slučajnih grešaka daju istu vrednost endogenih promenljivih a u modelima sa različitim strukturnim parametrima. U tom slučaju postoji čitav niz struktura koje daju željeni odgovor i prava struktura se ne može identifikovati.

3) S obzirom da je realno moguće znati vrednosti egzogenih i endogenih promenljivih samo na osnovu njihovog statističkog uzorka, strukturni parametri se mogu odrediti jedino statističkim ocenjivanjem koje se uvek bazira na nekom načinu minimizacije grešaka.

Opšti oblik linearnog modela koji sadrži **g** simultanih relacija tj. sadrži **g** endogenih promenljivih i **k** zadatih promenljivih se može napisati u matričnom obliku kao:

$$\mathbf{BY}_t + \mathbf{CX}_t = \varepsilon_t \tag{4.3}$$

gde su:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} & \cdots & \mathbf{b}_{1g} \\ \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22} & \cdots & \mathbf{b}_{2g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}_{g1} & \mathbf{b}_{g2} & \cdots & \mathbf{b}_{gg} \end{bmatrix}$$

tj. **B** je kvadratna matrica reda **g** čiji su elementi parametri koji se nalaze uz endogene promenljive;

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{11} & \mathbf{c}_{12} & \cdots & \mathbf{c}_{1k} \\ \mathbf{c}_{21} & \mathbf{c}_{22} & \cdots & \mathbf{c}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{c}_{g1} & \mathbf{c}_{g2} & \cdots & \mathbf{c}_{gk} \end{bmatrix}$$

tj. **C** je matrica reda **(g x k)** čiji su elementi koeficijenti uz zadate promenljive odnosno egzogene promenljive i endogene promenljive sa kašnjenjem;

$$\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{1t} \\ \mathbf{Y}_{2t} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{gt} \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1t} \\ \mathbf{X}_{2t} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{kt} \end{bmatrix} \quad \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{gtg} \end{bmatrix}$$

tj. $\mathbf{Y}_t$ je vektor kolona endogenih promenljivih, $\mathbf{X}_t$ je vektor kolona zadatih promenljivih, a $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ je vektor kolona slučajnih grešaka.

Model simultanih jednačina oblika (4.3) se naziva **strukturni model**. Ukoliko je matrica **B** nesingularna iz (4.3) sledi:

$$\mathbf{Y}_t = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}_t + \mathbf{B}^{-1}\varepsilon_t \qquad (4.4)$$

Model simultanih jednačina u obliku (4.4) se naziva **redukovani oblik**.

4.2. Identifikacija

Ako se strukturni model (4.3) pomnoži sa leva sa nesingularnom matricom **A** reda **(g x g)** dobija se:

$$\mathbf{ABY}_t + \mathbf{ACX}_t = \mathbf{A}\varepsilon_t \qquad (4.5)$$

Redukovani oblik koji se dobija iz ovog novog modela je:

$$Y_t = -(AB)^{-1}ACX_t + (AB)^{-1}A\varepsilon_t = -B^{-1}CX_t + B^{-1}\varepsilon_t \qquad (4.6)$$

jer je:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Kako je (4.6) identično sa (4.4) može se zaključiti da originalini model (4.3) i novi model (4.5) imaju isti redukovani oblik. Znači modeli sa različitim vrednostima parametara daju istu raspodelu zavisnih promenljivih a za zadate vrednosti nezavisnih promenljivih i slučajnih grešaka. U ovom slučaju, za ocene dobijene originalnim i novim modelom (4.3) i (4.5) respektivno, kaže se da su observaciono ekvivalentne zbog toga što imaju iste implikacije na pojavu koja se ispituje. Ovaj problem se naziva **problem identifikacije** u kontekstu modela simultanih jednačina. Prema tome, problem se sastoji u tome da se različiti skupovi strukturnih parametara tj. **(B,C)** i **(AB,AC)** mogu dobiti iz skupa observacija endogenih i zadatih promenljivih **($\mathbf{Y}_t$,$\mathbf{X}_t$)** te je nemoguće zaključiti koji skup odgovara pravom modelu.

Opšti postupak koji se određuje stanje identifikacije bilo kakvog strukturnog modela je sledeći. Strukturni model sa ocenjenim vrednostima parametara **B** i **C** je:

$$\mathbf{BY}_t + \mathbf{CX}_t = 0 \tag{4.7}$$

S druge strane, ocene koje se dobijaju metodom najmanjih kvadrata za redukovani oblik su:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{PX}_t \tag{4.8}$$

Zamenjujući $\mathbf{Y}_t$ iz (4.8) u (4.7) sledi:

$$\mathbf{BPX}_t + \mathbf{CX}_t = 0$$

odnosno:

$$\mathbf{BP} = -\mathbf{C} \tag{4.9}$$

Jednačina (4.9) definiše vezu koja važi između strukturnih i redukovanih parametara.

Uočimo **i**-tu jednačinu ovog sistema i uvedimo sledeće oznake:

- $\mathbf{g}_1$ - broj endogenih promenljivih uključenih u **i**-tu jednačinu,
- $\mathbf{g}_2$ = $\mathbf{g} - \mathbf{g}_1$, gde g kao i ranije označava ukupan broj endogenih promenljivih u modelu simultanih jednačina,
- $\mathbf{k}_1$ - broj zadatih promenljivih (uključujući i konstantni član) uključenih u **i**-tu jednačinu,
- $\mathbf{k}_2$ = $\mathbf{k} - \mathbf{k}_1$, gde je **k** kao i ranije ukupan broj zadatih promenljivih (uključivši i konstantni član) u modelu simultanih jednačina.

Pretpostavimo da su parametri **i**-toj jednačini poređani tako da se pojavljuju prvo parametri koji nisu nule pa zatim parametri sa vrednošću nula. U vektorskoj notaciji to se može pisati kao:

$$\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} {}_1\mathbf{b} & 0_1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} {}_1\mathbf{c} & 0_2 \end{bmatrix}$$

gde smo uveli oznake:

$${}_1\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{i1} & \mathbf{b}_{i2} & \cdots & \mathbf{b}_{ig_1} \end{bmatrix}, \quad \text{vektor reda}\left(1 \times \mathbf{g}_1\right)$$
$$0_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{vektor reda}\left(1 \times \mathbf{g}_2\right)$$
$${}_1\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{i1} & \mathbf{c}_{i2} & \cdots & \mathbf{c}_{ik_1} \end{bmatrix}, \quad \text{vektor reda}\left(1 \times \mathbf{k}_1\right)$$
$$0_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{vektor reda}\left(1 \times \mathbf{k}_2\right)$$

Matrica **P** iz jednačine (4.9) se može razbiti na blokove na sledeći način:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}$$

pa se **i**-ta jednačina sistema (4.9) može napisati kao:

$$\begin{bmatrix} {}_1\mathbf{b} & 0_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -{}_1\mathbf{c} & 0_2 \end{bmatrix} \qquad (4.10)$$

Iz jednačine (4.10) slede dve jednačine:

$$ {}_1\mathbf{b}\mathbf{P}_{11} = -{}_1\mathbf{c} \qquad (4.11)$$
$$ {}_1bP_{12} = 0_2 \qquad (4.12)$$

Ako se jednačina (4.12) može rešiti po nepoznatim ${}_1\mathbf{b}$ onda se iz (4.11) može naći ${}_1\mathbf{c}$. Vektor ${}_1\mathbf{b}$ sadrži **(g_1 - 1)** nepoznati parametar pošto je jedan od parametara u strukturnoj jednačini jednak jedinici. Prema tome, potreban uslov da bi se dobilo **(g_1 - 1)** nepoznatih parametara u ${}_1\mathbf{b}$, je da broj jednačina u (4.12) bude najmanje **(g_1 - 1)**, tj.:

$$\mathbf{k}_2 \geq \mathbf{g}_1 - 1 \qquad (4.13)$$

Drugim rečima, broj zadatih promenljivih koje se isključuju iz jednačine mora biti najmanje jednak broju endogenih promenljivih koje ostaju u jednačini, minus jedan.

Može se zaključiti da je potreban i dovoljan uslov za identifikaciju da je broj nezavisnih jednačina u (4.12) jednak **(g_1 - 1)**, tj. da je:

$$\mathbf{rang}(\mathbf{P}_{12}) = \mathbf{g}_1 - 1 \quad \text{tj.} \quad rang(P_{12}) = rang(\Delta) - g_2 \qquad (4.14)$$

1) Ako je $\mathbf{k}_2 < \mathbf{g}_1 - 1$ kažemo da je strukturni model neidentifikovan ili podidentifikovan
2) Ako je $\mathbf{k}_2 = \mathbf{g}_1 - 1$ kaže se da je strukturni model "tačno" identifikovan
3) Ako je $\mathbf{k}_2 > \mathbf{g}_1 - 1$ kaže se da je strukturni model "suviše" identifikovan.

Na osnovu dosad izloženog može se zaključiti, da je pre procedure ocenjivanja parametara nekog strukturnog modela simultanih jednačina potrebno prvo utvrditi njegovu matematičku kompletnost a zatim i stanje identifikacije. Ako model nije matematički kompletan tad se ne mogu dobiti rešenja za endogene promenljive. Drugim rečima, model ne može da nam pruži odgovor na pitanja, kako promene u

egzogenim promenljivim utiču na endogene promenljive. Identifikacija je takođe algebarski uslov koji se mora zadovoljiti pre statističkog ocenjivanja parametara. Uslov (4.14) je potreban i dovoljan za identifikaciju uz jedino a priori znanje da neke promenljive imaju nulte koeficijente. Ukoliko ovaj uslov nije zadovoljen nije moguće utvrditi koji od svih mogućih skupova parametara je onaj pravi.

Da bi ilustrovali primenu uslova (4.14) u identifikaciji sistema simultanih jednačina, razmotrimo slučaj sledećeg sistema sa dve jednačine:

$$\mathbf{b}_{11}\mathbf{Y}_{1t} + \mathbf{b}_{12}\mathbf{Y}_{2t} + \mathbf{c}_{11}\mathbf{X}_{1t} + \mathbf{c}_{12}\mathbf{X}_{2t} = \varepsilon_{1t}$$
$$\mathbf{b}_{21}\mathbf{Y}_{1t} + \mathbf{b}_{22}\mathbf{Y}_{2t} + \mathbf{c}_{21}\mathbf{X}_{1t} + \mathbf{c}_{22}\mathbf{X}_{2t} = \varepsilon_{2t}$$

Gornji sistem u datom obliku je očigledno podidentifikovan pošto još uvek nisu uvedene a priorne restrikcije na promenljive. Pretpostavimo da je:

$\mathbf{c}_{12} = 0$ i $\mathbf{c}_{21} = 0$

Za prvu jednačinu imamo **i = 1** tj.

$$\mathbf{P}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{c}_{22} \end{bmatrix}$$

Prema tome:

$$\mathbf{rang}(\mathbf{P}_{12}) = 1 = 2 - 1 = \mathbf{g} - 1$$

te je prema tome prva jednačina tačno identifikovana pod uslovom da je

$\mathbf{c}_{22} \neq 0.$

Za drugu jednačinu se dobija:

$$\mathbf{P}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{11} \\ 0 \end{bmatrix}$$

odnosno :

$$\mathbf{rang}(\mathbf{P}_{12}) = 1 = 2 - 1 = \mathbf{g} - 1$$

te je i druga jednačina tačno identifikovana.

Može se analogno pokazati da u slučaju da je:

$\mathbf{c}_{12} = 0$ i $\mathbf{c}_{22} = 0$

nijedna od gornjih dveju jednačina nije identifikovana.

4.3. Ocenjivanje parametara indirektnom metodom najmanjih kvadrata

Iz redukovanog oblika (4.4) modela simultanih jednačina se vidi da je svaki elemenat vektora endogenih promenljivih $\mathbf{Y}_t$ korelisan sa svakim elementom vektora slučajnih grešaka ε_t . Ovo znači da ako se, na primer, u prvoj jednačini pored endogene promenljive $\mathbf{Y}_{1t}$ pojavljuju i ostale endogene promenljive, recimo $\mathbf{Y}_{2t}$, $\mathbf{Y}_{3t}$ itd., ove endogene promenljive zavise od ε_{1t}. Ova činjenica kvari standardnu hipotezu metodom najmanjih kvadrata da promenljive kojima se objašnjava zavisna promenljiva, u ovom slučaju $\mathbf{Y}_{1t}$, ne zavise od slučajne greške ε_{1t}. Prema tome, nije korektno direktno primenjivati metodu najmanjih kvadrata na pojedinačne jednačine modela simultanih jednačina, jer endogene promenljive koje igraju ulogu i nezavisnih promenljivih u pojedinim jednačinama, zavise od slučajne greške.

Zbog toga je razvijen čitav niz metoda koje omogućavaju da se ipak, primenjujući metodu najmanjih kvadrata, dođe do zadovoljavajućih ocena za strukturne parametre.

Ocenu strukturnih parametara indirektnim metodom najmanjih kvadrata ćemo ilustrovati na sledećem maksimalno uprošćenom modelu koji povezuju potrošnju **C**, sa dohotkom **Y** i investicijama **I**, tj.:

$$\mathbf{C} = \alpha + \beta \mathbf{Y} + \varepsilon \tag{4.15}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} + \mathbf{I} \tag{4.16}$$

Y i **C** su endogene promenljive a **I** je egzogena promenljiva koja se zadaje van modela. Pretpostavlja se da **I** i ε nisu korelisani. Jednačina (4.15) je determinističkog karaktera i predstavlja bilansnu vezu **Y**, **C** i **I**.

Suština indirektne metode najmanjih kvadrata je da se strukturni model (4.15) i (4.16) transformiše u redukovani oblik:

$$\mathbf{C} = \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{\beta}{1-\beta}\mathbf{I} + \frac{1}{1-\beta}\varepsilon \tag{4.17}$$

$$\mathbf{Y} = \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta}\mathbf{I} + \frac{1}{1-\beta}\varepsilon \tag{4.18}$$

Dalje, pošto je i nezavisno od ε moguće je direktno primeniti metodu najmanjih kvadrata pojedinačno na jednačine (4.17) i (4.18) i dobiti odgovarajuće ocene.

Prema tome, ako se primeni metoda najmanjih kvadrata direktno na jednačinu (4.17) dobijaju se ocene recimo $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{b}_1$:

$\mathbf{a}_1$ je ocena za $\dfrac{\alpha}{1-\beta}$

$\mathbf{b}_1$ je ocena za $\dfrac{\beta}{1-\beta}$

Ovako dobijene ocene su najbolje nepristrasne ocene redukovanih prametara datih gornjim odnosima ali ne daju nepristrasne ocene strukturnih parametara α i β. Ipak na ovaj način dobijene ocene strukturnih parametara α i β su konzistentne, te prema tome asimptotski nepristrasne.

Napominje se, da je ocenu strukturnih parametara moguće dobiti na osnovu redukovanih parametara samo u slučaju da su sve jednačine u sistemu simultanih jednačina tačno identifikovane.

4.4. Ocenjivanje parametara dvostepenom metodom najmanjih kvadrata

Dvostepena metoda najmanjih kvadrata je široko prihvaćen metod ocene parametra modela simultanih jednačina. Ova metoda kao i indirektna metoda najmanjih kvadrata se primenjuje na svaku od simultanih jednačina posebno, ili se može primeniti i u slučaju da je jednačina suviše identifikovana.
Posmatrajmo **i**-tu jednačinu u simultanom modelu i izrazimo je u obliku:

$Y = Y_1 b + X_1 c + \varepsilon$, gde je:

Y - vektor kolona **N** observacija endogene promenljive koja se objašnjava u ovoj jednačini,
$\mathbf{Y}_1$ - je matrica reda **($\mathbf{N}$ x $\mathbf{g}_1$)** observacija ostalih endogenih promenljivih koje se pojavljuju u ovoj jednačini,
b - vektor kolona parametara asociranih sa $\mathbf{Y}_1$,
$\mathbf{X}_1$ - matrica reda **($\mathbf{N}$ x $\mathbf{k}_1$)** observacija zadatih promenljivih koje se pojavljuju u ovoj jednačini,
c - vektor kolona parametara asociranih uz $\mathbf{X}_1$, i
e - vektor kolona od **N** slučajnih grešaka.

Dvostepena metoda najmanjih kvadrata kao što joj ime i kaže se izvodi u dva stepena. U prvom stepenu, traže se ocene najmanjih kvadrata parametara koji se nalaze uz endogene promenljive koje su objašnjavanjuće u **i**-toj jednačini, regresijom na zadate promenljive koje se pojavljuju u modelu, tako da se dobija matrica:

$$\hat{\mathbf{Y}}_1 = \mathbf{X}\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{X}\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y}_1$$

gde je $\mathbf{X} = \left[\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2\right]$ matrica reda **(N x k)** observacija svih zadatih promenljivih, a $\mathbf{X}_2$ je matrica observacija onih zadatih promenljivih koje su isključene iz i-te jednačine. Ovakva regresija je opravdana jer **X** nije korelisano sa ε.

U drugom stepenu **y** se regresira na $\mathbf{Y}_1$ i $\mathbf{X}_1$ i rezultat je ocena dvostepene metode najmanjih kvadrata:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_1^T\hat{\mathbf{Y}}_1 & \hat{\mathbf{Y}}_1^T\mathbf{X}_1 \\ \mathbf{Y}_1^T\hat{\mathbf{Y}}_1 & \mathbf{X}_1^T\mathbf{X} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_1^T\mathbf{y} \\ \mathbf{X}_1^T\mathbf{y} \end{bmatrix}$$

gde su sa $\hat{\mathbf{b}}$ i $\hat{\mathbf{c}}$ označene ocene parametara **b** i **c**.

Ocene strukturnih parametara dobijene metodom dvostepenih najmanjih kvadrata su konzistentne i asimptomtski nepristrasne.

Prema tome, primena ove metode na sistem jednačina (4.15) i (4.16) dovodi do toga da se prvo regresira recimo **Y** na **I** i dobije se ocenjena relacija:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{a} + \mathbf{bI}$$

potom se regresira **C** na **Y** koje je sad "očišćeno" od slučajnih grešaka te se može primeniti metoda najmanjih kvadrata na regresiju:

$$\mathbf{C} = \alpha + \beta\mathbf{Y} + \varepsilon$$

i dobiti odgovarajuće ocene za α i β.