

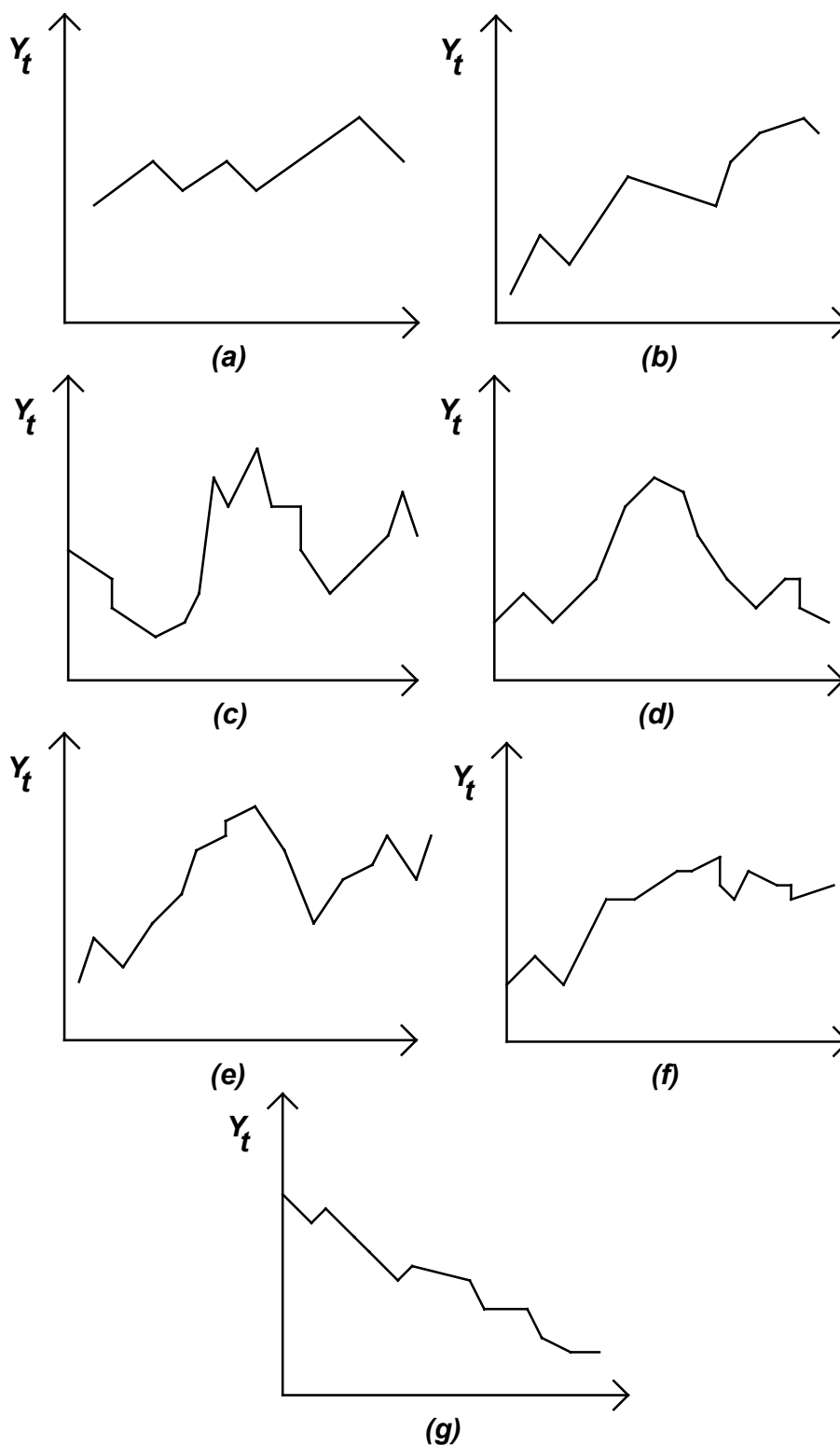
## 5. ANALIZA VREMENSKIH SERIJA

### 5.1. Uvod

Skup podataka  $\{ y_t \}$  uređen tako da predstavlja datu pojavu u vremenskim tačkama  $t$ , se naziva *vremenska serija*. S obzirom da je proces donošenja odluka često povezan sa predviđanjem budućih vrednosti promenljivih koje zavise od vremena, vremenske serije i njihova analiza predstavljaju pogodno sredstvo. Naime, u ovom kontekstu predviđanje podrazumeva analizu istorijskih podataka o datoj pojavi i ekstrapolaciji istih u budućnosti, obično koristeći neki matematički model. Važno je napomenuti, da predviđanje korišćenjem vremenskih serija da pojava koja se ispituje, nastavlja da se ponaša slično kao u bliskoj prošlosti.

Za ilustraciju korišćenja vremenskih serija uzmimo slučaj predviđanja tražnje izvesnog proizvoda. Na primer, ukoliko je na osnovu podataka vremenske serije moguće predvideti tražnju za sledećih šest meseci, onda je moguće planirati proizvodnje kapacitete uključujući i plan radne snage, planirati zalihe, distribuciju proizvoda i slično. Isto tako, ukoliko je na osnovu vremenskih serija moguće izvršiti dugoročnije planiranje tražnje, recimo godinu dana ili više, tad se te informacije mogu iskoristiti za svrhe planiranja finansija, izgradnje novih kapaciteta, itd. Samo po sebi je jasno da je korišćenje vremenskih serija pouzdanije u svrhe kratkoročnog predviđanja nego u svrhe dugoročnog.

Period vremena između dve susedne tačke vremenske serije zavisi od primene i može biti: sekunda, dan, nedelja, mesec ili godine, tipično. Izbor intervala između pojedinih tačaka vremenske serije znatno utiče na upotrebnu vrednost vremenskih serija u svrhe predviđanja. Isto tako se može zaključiti da podaci iz dalje prošlosti su od manjeg značaja za predviđanje od podataka iz bliže prošlosti. Nekoliko karakterističnih vremenskih serija je prikazano na *Sl.5.1*. Vremenske serije koje predstavljaju realne pojave su obično kombinacije nekoliko karakterističnih oblika prikazanih na *Sl.5.1.a-g*.



### *Sl.5.1. Karakteristični oblici vremenskih serija*

Oblik sa *Sl.5.1.a.* opisuje konstantan proces u vremenu; oblik sa *Sl.5.1.b.* opisuje linearni rast u vremenu; oblik sa *Sl.5.1.c.* opisuje periodičnu pojavu; oblik sa *Sl.5.1.d.* opisuje impulsnu promenu; oblik sa *Sl.5.1.e.* opisuje step promenu; oblik sa *Sl.5.1.f.* opisuje porast sa saturacijom i onaj sa *Sl.5.1.g.* opadanje u vremenu.

S obzirom na navedene karakteristične oblike vremenskih serija uobičajeno je pretpostaviti u analizi bilo koje vremenske serije da se podatak  $y_t$  sastoji od jedne ili više sledećih komponenata:

- 1) Komponenta  $Y_t$  koja opisuje dugoročni rast ili opadanje serije i koja se obično naziva trend.
- 2) Komponenta  $S_t$  koja opisuje sezonske fluktuacije serije koje se superponiraju na trend i koja predstavlja periodične promene kraće periode.
- 3) Komponenta  $C_t$  koja opisuje ciklične fluktuacije koje predstavljaju periodične fluktuacije duže periode.
- 4) Komponenta  $\varepsilon_t$  koja opisuje slučajne fluktuacije koje potiče od statističke prirode pojave.

Uobičajeno je da se za opis vremenskih serija koriste aditivni i multiplikativni model, predstavljeni jednačinama (5.1) i (5.2), respektivno:

$$y_t = Y_t + S_t + C_t + \varepsilon_t \quad (5.1)$$

$$y_t = Y_t S_t C_t \varepsilon_t \quad (5.2)$$

U sledećem će se razmotriti neke od postojećih metoda za određivanje pojedinih komponenti vremenske serije.

## 5.2. Trend vremenske serije

Prvi korak u analizi vremenske serije tj. tabele parova  $(t, y_t)$ , je crtanje grafikaona  $y_t$  u funkciji vremena  $t$  pomoću koga se mogu lakše shvatiti globalne karakteristike pojave koja se ispituje. Na primer, kakav je karakter pojedinih od četiri navedene komponente kao i njihovo relativno učešće u opisu date vremenske serije, i slično. Isto tako, na osnovu grafičkog prikaza vremenske serije moguće i odabrati odgovarajući matematički izraz koji definiše ponašanje vremenske serije.

U većini slučajeva trend vremenske serije predstavlja komponentu od najvećeg interesa s obzirom da opisuje osnovno ponašanje date pojave u dužem vremenskom periodu ili tačnije u čitavom periodu za koji je vremenska serija poznata. Zbog toga se ponekad u literaturi trend naziva i *sekularni trend*.

U slučajevima kada je relativni udeo ostali tri komponente mali u odnosu na trend vremenske serije, njega je moguće odrediti grafički provlačeći vizuelno najbolju glatku krivu koja prolazi kroz tačke vremenske serije. Jasno je da je ovakav postupak ograničene tačnosti i podložan subjektivnim greškama.

### 5.2.1. Metod pokretnih sredina

Jedan od najjednostavnijih metoda određivanja trenda vremenske serije, u slučaju da su vrednosti  $Y_t$  date za ekvidistantne vrednosti promenljive  $t$ , tj. vrednosti kod kojih je intervala između pojedinih vremenskih tačaka konstantan, je metod pokretnih sredina. Suština ove metode je nalaženje srednje vrednosti za određeni broj tačaka vremenske serije i uzimajući da tako sračunata srednja vrednost predstavlja vremensku seriju u tom intervalu, s tim što se postavlja na sredinu intervala u kome je srednja vrednosti određivanja.

Period u kome se usrednjavanje vrši je u principu proizvoljan i određuje se na osnovu karakteristika sam vremenske serije. Ako serija pokazuje periodične fluktuacije za interval u kome se određuju pokretne sredine se uzima period  $r$  periodičkih fluktuacija. Za ekvidistantne vremenske tačke pogodno je pretpostaviti da promenljiva  $t$  uzima vrednosti  $t = 1, 2, \dots, N$ . U slučaju da interval usrednjavanja  $r$  ima neparnu vrednost, tj.:

$$r = 2m + 1$$

tad se pokretne sredine  $A_t$  sračunavaju na osnovu izraza:

$$A_t = S_t / (2m + 1) \quad (5.3)$$

gde je

$$S_t = y_{t-m} + y_{t-m+1} + \dots + y_t + \dots + y_{t+m} \quad (5.4)$$

Na osnovu definicije sume (5.4) jasno je da je prva tačka u kojoj se računa pokretna sredina  $y_{m+1}$ , a zadnja  $y_{N-m}$  s tim što  $y_1$  označava prvu a  $y_N$  poslednju tačku vremenske serije. U slučaju da je interval  $r$  paran, tj:

$$r = 2m$$

tad se sračunavaju takozvane centrirane pokretne sredine na osnovu izraza:

$$A_t = \left( \frac{S_{\left(t-\frac{1}{2}\right)} + S_{\left(t+\frac{1}{2}\right)}}{4m} \right) \quad (5.5)$$

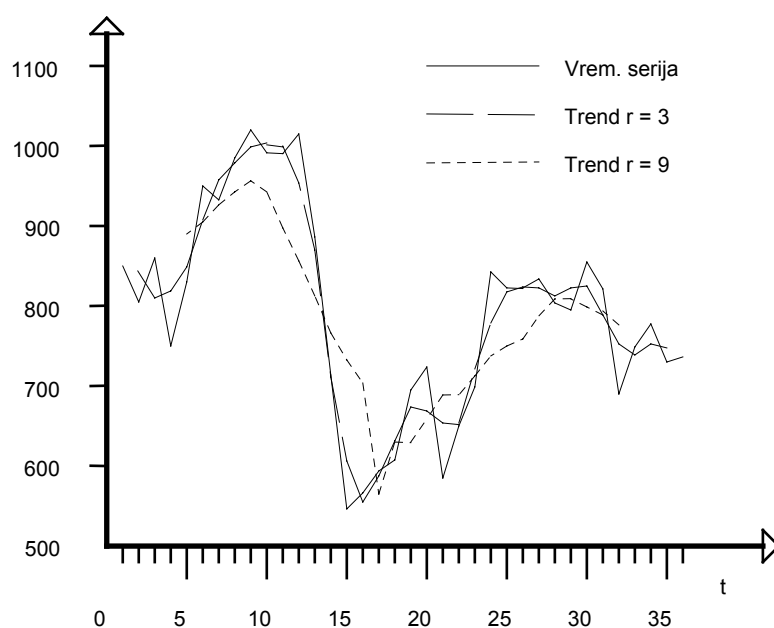
gde je:

$$S_{t-\frac{1}{2}} = y_{t-m} + y_{t-m+1} + \dots + y_t + \dots + y_{t+m-1}$$

$$S_{t+\frac{1}{2}} = y_{t-m+1} + \dots + y_t + \dots + y_{t+m}$$

Vrednosti  $A_t$  pokretnih sredina, dobijene na bilo koji od dva navedena načina, predstavljaju aproksimaciju trenda u odgovarajućim tačkama.

Za ilustraciju metode pokretnih sredina u *Tabeli 5.1.* je prikazana vremenska serija koja predstavlja tražnju nekog proizvoda u funkciji vremena, zajedno sa pokretnim sredinama sračunatim za vrednosti intervala usrednjavanja  $r=3,5,7,9$  vremenskih jedinica, tj. za vrednosti  $m=1,2,3$  i 4. Grafik koji predstavlja vrednosti vremenske serije  $y_t$  kao i vrednosti trenda sračunate metodom pokretnih sredina za  $r = 3$  i 9 je dat na *Sl.5.2.*



*Sl.5.2.* Trend određen metodom pokretnih sredina

Jasno je da se metod pokretnih sredina bazira na efektu usrednjavanja čime se iz vremenske serije uklanjaju slučajne fluktuacije a i periodične fluktuacije u zavisnosti od veličine intervala usrednjavanja, i na taj način dobija trend vremenske serije koji predstavlja globalno ponašanje pojave. Sa *Sl.5.2.* se može zaključiti da što je duži interval usrednjavanja  $r$  kriva koja predstavlja trend postaje sve ravnija sa sve manje fluktuacija, što je i logično očekivati s obzirom na proces usrednjavanja.

*Tabela 5.1.*

t	$Y_t$	r=3	r=5	r=7	r=9
1918	857.5				
1919	804.5	843.2			
1920	867.7	809.5	823.4		
1921	756.2	818.3	843.4	858.3	
1922	830.9	848.3	869.2	876.5	890.5
1923	957.9	907.4	892.7	907.5	905.5
1924	933.4	958.8	945.7	925.4	926.4
1925	985.1	979.9	978.1	959.1	942.8
1926	1021.1	999.7	984.9	985.5	956.9
1927	993.0	1002.1	1001.4	947.7	943.9
1928	992.1	1000.3	980.9	943.4	897.7
1929	1015.9	963.4	919.5	880.1	856.4
1930	882.3	870.9	829.3	814.5	812.9
1931	714.4	712.9	743.3	757.4	766.7
1932	541.9	606.1	658.7	702.2	733.5
1933	561.9	565.7	603.4	656.3	703.8
1934	593.2	587.0	599.4	633.7	565.0
1935	605.8	631.1	635.9	615.3	630.4
1936	694.4	674.9	640.7	631.1	628.7
1937	724.4	668.2	652.5	650.7	658.9
1938	585.7	654.1	671.2	682.1	688.0
1939	652.1	645.7	649.9	713.2	712.7
1940	699.2	721.5	714.8	730.6	738.2
1941	843.3	778.7	760.9	746.4	750.6
1942	823.6	817.7	797.4	777.9	758.4
1943	816.2	824.9	818.8	798.3	788.5
1944	834.8	819.0	815.1	820.7	807.3
1945	806.1	812.0	821.6	821.9	806.3
1946	795.0	819.0	822.6	802.9	799.1
1947	855.8	824.1	793.8	793.1	794.1
1948	821.5	789.3	782.2	785.1	784.6
1949	690.6	753.4	779.0	774.3	773.7
1950	748.1	739.2	753.9	766.0	
1951	778.8	752.5	736.9		
1952	730.5	748.6			
1953	736.6				

### 5.2.2. Analitičke metode određivanja trenda

Trend vremenske serije se može odrediti pretpostavljajući da se može izraziti pomoću određene matematičke funkcije. U slučaju da je to za datu vremensku seriju moguće, odnosno da se trend može dovoljno dobro opisati nekom matematičkom funkcijom, tada se zadatak analize, interpretacije i ekstrapolacije vremenske serije može lakše i tačnije obaviti. Za matematičku funkciju koja opisuje trend neke društveno-ekonomske pojave se nekad pretpostavlja da definiše "zakon" ponašanja pojave. Međutim, u većini slučajeva za trend vremenske serije, bilo da je utvrđen metodom pokretnih sredina ili predstavljen nekom matematičkom funkcijom, teško je zaključiti da definiše neki "zakon" pojave, već u najboljem, empirijski ustanovljenu uniformnost ponašanja pojave.

U praktičnom pristupu određivanju trenda analitičkom metodom, potrebno je izabrati tip matematičke funkcije koja najbolje opisuje datu vremensku seriju. Ovo je sigurno i najteži deo posla, pošto ne postoji objektivni zakon koga treba slediti u izboru tipa funkcije. Međutim, ispitujući vrednosti zavisne  $y_t$  i nezavisne promenljive  $t$  u prostim slučajevima važi sledeće:

- a) Ako niz vrednosti promenljive  $t$  čini aritmetičku progresiju a odgovarajuće vrednosti  $y_t$  formiraju geometrijsku progresiju, tad je relacija koja povezuje  $y_t$  i  $t$ , eksponencijalnog tipa, tj.:

$$\hat{y}_t = ab^t$$

- b) Ako niz vrednosti promenljive  $t$  čini geometrijsku progresiju a i odgovarajući niz  $y_t$  isto tako, tad je relacija parboličkog ili hiperboličkog tipa, tj.:

$$\hat{y}_t = at^b$$

- c) Ako niz vrednosti promenljive  $t$  čini aritmetičku progresiju a prve difference odgovarajućih vrednosti  $y_t$  su konstantne, tad je relacija linearna tj.:

$$\hat{y}_t = a + bt$$

Termin "prve difference" se odnosi na razlike između uzastopnih vrednosti  $y_t$  i označava se sa  $\Delta y_t$ . Razlike između uzastopnih prvih diferencijacija se nazivaju "druge difference" i označavaju se sa  $\Delta^2 y_t$ . Analogno se definišu i više difference.

- d) Ako niz vrednosti promenljive  $t$  čini aritmetičku progresiju a  $n$ -te difference odgovarajućih  $y_t$  vrednosti su konstantne, relacija je polinomijalna, tj.:

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$$

Jasno je da podaci  $t$  i  $y_t$  relane vremenske serije retko zadovoljavaju sasvim tačno bilo koji od navedenih testova a) do d).

U opštem slučaju trend vremenske serije se opisuje matematičkom funkcijom oblika:  $f(t; a_0, a_1, \dots, a_n)$  odnosno pretpostavlja se da se vremenska serija opisuje jednačinom:

$$y_t = f(t; a_0, a_1, \dots, a_n) + \varepsilon_t \quad (5.7)$$

parametri  $a_0, a_1, \dots, a_n$  se određuju obično metodom najmanjih kvadrata, odnosno, minimizacijom sume kvadrata:

$$Q_n = \sum_t (y_t - f(t; a_0, a_1, \dots, a_n))^2 \quad (5.8)$$

odnosno rešavanjem sistema normalnih jednačina:

$$\frac{\partial Q_m}{\partial a_i} = 0, \quad i=0, 1, \dots, n \quad (5.9)$$

Za slučaj polinomijalne aproksimacije trenda, izraz (5.8) ima oblik:

$$Q_n = \sum_t (y_t - a_0 - a_1 t - a_2 t^2 - \dots - a_n t^n)^2 \quad (5.10)$$

a sistem normalnih jednačina je:

$$T_j = a_0 S_j + a_1 S_{j+1} + \dots + a_n S_{j+n}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (5.11)$$

gde je:

$$T_j = \sum_t y_t t^j$$

$$S_j = \sum_t t^j$$

Rešenjem sistema jednačina (5.11) dobija se niz parametara  $a_0, \dots, a_n$ , koji definišu liniju polinomijalnog trenda.

Kao ilustraciju analitičke metode određivanja trenda u Tabeli 5.2. su dati podaci vremenske serije koja opisuje broj istraživača u samostalnim naučnim ustanovama u oblasti tehničkih nauka SR Srbije, zajedno sa podaci za trend dobijenim na osnovu sledeća tri analitička izraza:

$$Y_t = a + bt \quad - \text{linearni trend,}$$

$$Y_t = a + bt + ct^2 \quad - \text{kvadratni trend,}$$

$$Y_t = ab^t \quad - \text{eksponencijalni trend.}$$

Jednačina dobijenog linearnog trenda je:



$Y_t = 272 + 86t$  sa sumom kvadrata odstupanja:  $Q_1 = 45509$ .

Jednačina kvadratnog trenda je:

$Y_t = 222 + 109t - 1,9t^2$  sa sumom kvadrata odstupanja  $Q_2 = 42305$ .

Jednačina eksponencijalnog trenda je:

$Y_t = 361 * 1,13^t$  sa sumom kvadrata odstupanja:  $Q_3 = 37601$ .

Na osnovu rezultata dobijenih za sumu kvadrata odstupanja može se zaključiti da eksponencijalni trend najbolje opisuje datu vremensku seriju.

U Tabeli 5.3. su data predviđanja bazirana na ekstrapolaciji odgovarajućih trendova iz Tabele 5.2.

Tabela 5.2.

Godine	Stvarni podaci	Teorijski podaci linearni trend	Teorijski podaci kvadratni trend	Teorijski podaci eksponencijalni trend
1957	392	358	329	406
1958	443	443	432	457
1959	480	529	531	514
1960	552	614	626	579
1961	693	700	717	651
1962	784	785	805	733
1963	873	871	889	824
1964	1072	956	968	928
1965	1129	1042	1044	1044
1966	1141	1127	1116	1174
1967	1083	1213	1185	1322

Tabela 5.3.

Godine	Linearni trend	Kvadratni trend	Eksponencijalni trend
1968	1.299	1.248	1.488
1969	1.384	1.309	1.674
1970	1.470	1.365	1.884
1971	1.555	1.419	2.121
1972	1.641	1.468	2.386
1973	1.727	1.513	2.685
1974	1.813	1.544	3.022
1975	1.898	1.591	3.400
1976	1.984	1.624	3.827

### 5.2.3. Metoda eksponencijalnog izravnjavanja

U metodi pokretnih sredina se gube tačke koje se nalaze na krajevima vremeske serije. Ukoliko je interval usrednjavanja veći onda se gubi i više tačaka. Takođe, ne

postoji egzaktna način određivanja vrednosti vremenske serije u budućim vremenskim periodima  $t$ . **Metoda eksponencijalnog izravnavanja** omogućava eksplicitno sračunavanje budućih vrednosti vremenske serije.

Polazeći od skupa vrednosti vremenske serije  $\{y_t\}$ ,  $t = 1, 2, \dots, N$  sračunavaju se eksponencijalno izravnanate vrednosti  $\{E_t\}$ ,  $t = 1, 2, \dots, N$ , na osnovu sledećeg algoritma:

$$\begin{aligned} E_1 &= y_1 \\ E_2 &= wy_2 + (1-w)E_1 \\ E_3 &= wy_3 + (1-w)E_2 \\ &\vdots \\ E_t &= wy_t + (1-w)E_{t-1} \\ &\vdots \\ E_N &= wy_N + (1-w)E_{N-1} \end{aligned}$$

gde je  $w$  težina koja se naziva konstanta eksponencijalnog izravnavanja i koja uzima vrednosti u intervalu između  $0$  i  $1$ . Odgovarajućim izborom vrednosti ove težine, može se više ili manje isticati uticaj prošlih vrednosti vremenske serije u odnosu na tekuću vrednost. Naime, ukoliko  $w$  uzima vrednost koja je bliža nuli, tad je uticaj prošlih vrednosti veći, odnosno stepen izravnjavanja serije je veći i obrnuto ukoliko je vrednost bliža jedinici, tad je uticaj prošlih vrednosti manji, odnosno stepen izravnavanja je manji.

Prognozirana vrednost vremenske serije u nekom budućem trenutku  $t$  se izračunava kao:

$$F_t = wy_N + (1-w)E_N, \quad t = N+1, N+2, \dots$$

Kao što se vidi, metoda eksponencijalnog izravnavanja daje istu vrednost za sve buduće vremenske periode, te se može koristiti u slučaju stacioniranih vremenskih serija, tj. serija koje nemaju komponente trenda i sezonskih ili cikličnih fluktuacija, već su prisutne jedino slučajne fluktuacije.

#### 5.2.4. Metoda Holt-Wintersa

Nedostatak metode eksponencijalnog izravnavanja je nemogućnost predstavljanja trenda i sezonskih fluktuacija. **Metoda Holt-Winters-a** je proširenje metode eksponencijalnog izravnavanja tako da se obuhvati i trend i sezonske fluktuacije. Razmotrimo vremensku seriju  $\{y_t\}$ ,  $t = 1, 2, \dots, N$  koja ima komponentu trenda, a sezonske fluktuacije se mogu zanemariti. Tada se vremenska serija predstavlja preko

dve komponente:  $E_t$  - eksponencijalno izravната komponenta i  $T_t$  - komponenta trenda. Algoritam izračunavanja ovih komponenti je sledeći:

$$E_2 = y_2$$

$$E_t = wy_t + (1-w)(E_{t-1} + T_{t-1}), \quad t=3, 4, \dots, N$$

$$T_2 = y_2 - y_1$$

$$T_t = v(E_t - E_{t-1}) + (1-v)T_{t-1}, \quad t=3, 4, \dots, N$$

Veličine  $E_1$  i  $T_1$  nisu definisane.

Konstanta  $w$  je definisana isto kao i u metodi eksponencijalnog izravnavanja i analogno je uvedena i težina  $v$  čije su vrednosti u intervalu od 0 do 1 i koja se koristi u izračunavanju komponente trenda.

Prognoza za buduće periode se izračunava kao:

$$F_{N+1} = E_N + T_N$$

$$F_{N+2} = E_N + 2T_N$$

$$\vdots$$

$$F_{N+k} = E_N + kT_N$$

U slučaju da vremenska serija poseduje i sezonske fluktuacije metod Holt-Winters-a nudi sledeći algoritam gde je osim eksponencijalno izravната komponente  $E_t$  i komponenta trenda  $T_t$  prisutna i komponenta sezonskih fluktuacija  $S_t$ :

$$E_2 = y_2$$

$$E_t = wy_t + (1-w)(E_{t-1} + T_{t-1}), \quad t=3, 4, \dots, N$$

$$E_t = w(y_t / S_{t-p}) + (1-w)(E_{t-1} + T_{t-1}), \quad t=P+3, \dots, N$$

Veličine  $E_1$ ,  $T_1$  i  $S_1$  nisu definisane.

$$S_t = u \frac{Y_t}{E_t} + (1-u)S_{t-p}$$

Konstante  $w$  i  $v$  su isto definisane kao u prethodnom, a konstanta  $u$  je težina sa vrednostima između 0 i 1 i vezana je za komponentu sezonskih fluktuacija. Konstanta  $P$  označava broj perioda u jednom ciklusu sezonskih fluktuacija. Tako, na primer, ukoliko su podaci vremenske serije dati po kvartalim godine, tad je  $P = 4$ , a ukoliko su podaci mesečni, onda je  $P = 12$ .

Buduće vrednosti vremenske serije se izračunavaju kao:

$$F_{N+1} = (E_N + T_N)S_{n+1-P}$$

$$F_{N+2} = (E_N + 2T_N)S_{n+2-P}$$

$$\vdots$$

$$F_{N+k} = (E_N + kT_N)S_{n+k-P}$$

### 5.3. Primeri

1) Sledeća tabela predstavlja vremensku seriju veličine prodaje vina (u hiljadama litara) preduzeća za promet alkoholnim pićima, po kvartalima počev od 1988. godine pa zaključno sa 1990. godinom. U tabeli su prikazane i izračunate vrednosti za  $E_t$ ,  $T_t$  i  $S_t$  po Holt-Winters-ovoj metodi pretpostavljajući sledeće vrednosti za težine  $w$ ,  $v$  i  $u$ :

$w = 0,7$  ;  $v = 0,5$  ;  $u = 0,5$  i  $p = 4$ , s obzirom da su podaci dati po kvartalima.

*Tabela Holt-Winters*

Godina	Kvartal	t	$y_t$	$E_t$	$T_t$	$S_t$
1988	I	1	103.5			
	II	2	94.7	94.7	-8.8	1.000
	III	3	118.6	108.8	2.6	1.090
	IV	4	109.3	109.9	1.9	0.994
1989	I	5	126.1	121.8	6.9	1.035
	II	6	116.0	119.8	2.5	0.968
	III	7	141.2	127.4	5.1	1.100
	IV	8	131.6	132.3	5.0	0.995
1990	I	9	144.5	138.9	5.8	1.038
	II	10	137.1	142.6	4.8	0.965
	III	11	159.0	145.4	3.8	1.097
	IV	12	149.5	149.9	4.2	0.996
1991	I	13	166.1	158.2	6.3	1.044
	II	14	152.6	160.0	4.1	0.959
	III	15	178.2	162.9	3.5	1.095
	IV	16	169.0	168.7	4.7	0.999

Prognoza prodaje vina za prvi kvartal 1992. godine se izračunava kao

$$F_{17} = (E_{16} + T_{16})S_{17-1} = (E_{16} + T_{16})S_{13} = (168,7 + 4,7)1,044 = 181,0$$

Slično se dobija za II, III i IV kvartal

$$F_{18} = (168,7 + 2 * 4,7)1,044 = 170,8$$

$$F_{19} = (168,7 + 3 * 4,7)1,059 = 200,2$$

$$F_{20} = (168,7 + 4 * 4,7)0,999 = 187,3$$

Glavni nedostatak metode pokretnih sredina, metode eksponencijalnog izravnavanja i Holt-Winters-ove metode je nemogućnost određivanja greške ili intervala poverenja prognozirane vrednosti.

2) Podaci o izgrađenom poslovnom prostoru (u hiljadama m<sup>2</sup>), kvartalno, počev od zime 1987. godine pa zaključno do jeseni 1991. godine, dati su u sledećoj tabeli:

Godina	Kvartal	t	y <sub>t</sub>
1987	I	1	367.4
	II	2	581.1
	III	3	561.5
	IV	4	477.1
1988	I	5	292.3
	II	6	511.3
	III	7	459.8
	IV	8	387.0
1989	I	9	297.0
	II	10	523.2
	III	11	434.6
	IV	12	351.1
1990	I	13	218.7
	II	14	291.1
	III	15	341.4
	IV	16	364.3
1991	I	17	245.3
	II	18	300.4
	III	19	235.5
	IV	20	183.6

- Izračunati eksponencijalno izravnatu seriju koristeći konstantu izravnavanja  $w = 0,2$ .
- Na osnovu rezultata iz a. odrediti prognozu za zimu 1992. godine.
- Koristeći Holt-Winters metod za seriju sa trendom i sezonskim fluktuacijama odredi prognozu za sve kvartale 1992. godine. Koristiti  $w = 0,2$ ,  $v = 0,5$  i  $u = 0,7$ .

#### Rezultat:

a)

	I	II	III	IV
1987	367.40	410.14	440.41	447.75
1988	416.66	435.59	440.43	429.74
1989	403.20	427.20	428.68	413.16
1990	374.27	357.64	354.39	356.37
1991	334.16	327.41	308.62	283.62

b) 263. 62

c)

1992      238.88    300.59    262.04    235.91

3) Godišnja proizvodnja sirove nafte zemalja OPEC-a, izražena kao procenat ukupne svetske proizvodnje, je data u sledećoj tabeli:

Godina	Proizvodnja
1973	67.8
1974	67.9
1975	65.6
1976	68.0
1977	66.5
1978	64.3
1979	63.2
1980	59.8
1981	48.9
1982	43.9

- Izračunati i nacrtati pokretne sredine za interval od 3 tačke.
- Izračunati i nacrtati eksponencijalno izravnatu seriju sa  $w = 0.3$
- Odrediti prognozu za 1985. godinu koristeći pokretne sredine iz a.
- Odrediti prognozu za 1985. godinu koristeći rezultate pod b
- Odrediti prognozu za 1985. godinu koristeći Holt-Winters-ov metod sa trendom i  $w = 0.3$  i  $v = 0.8$

Rezultat:

a) i b)

Godina	Proizvodnja	$M_t$	$E_t$
1973	67.8		67.80
1974	67.9	67.10	67.83
1975	65.6	67.17	67.16
1976	68.0	66.70	67.41
1977	66.5	66.27	67.14
1978	64.3	64.67	66.29
1979	63.2	62.43	65.36
1980	59.8	57.30	63.69
1981	48.9	50.87	59.26
1982	43.9		54.65

c) približno 45.00

d) 51.43

e) 29.44