

TEORIJA VEROVATNOĆE DVODIMENZIONALNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

1. Pri bacanju homogene kocke posmatrane su slučajne veličine X i Y i definisane sa:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{ako } \{1, 3, 5\} \\ 0 & \text{ako } \{2, 4, 6\} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1 & \text{ako } \{3, 6\} \\ 0 & \text{ako } \{1, 2, 4, 5\} \end{cases}$$

- odrediti zakon raspodele verovatnoća dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y)
 - marginalne raspodele za X i Y
 - $E(X)$, $E(Y)$, $\sigma^2(X)$, $\sigma^2(Y)$
 - zakon raspodele verovatnoća slučajne veličine $Z=X+2Y$
 - $E(Z)$, $\sigma^2(Z)$
 - koeficijent korelacije X i Y
2. Za broj defekata prvog i drugog tipa jednog uređaja zna se da ima dvodimenzionalni zakon raspodele verovatnoća dat tabelom:

1.	2	1	0
2.	c	3c	2c
1	0.06	0.18	0.16
2	0.06	0.18	0.16

- odrediti c ako je X broj defekata drugog a Y broj defekata prvog tipa
 - izračunati koeficijent korelacije
3. Težina X i debljina Y artikla date su dvodimenzionalnim zakonom raspodele verovatnoća:

Y	4.3	3.0	0.5	1.0
X	0.04	0.05	0.07	0.12
1.4	0.10	0.05	0.08	0.08
1.9	0.06	0.10	0.05	0.20
2.5	0.06	0.10	0.05	0.20

- odrediti marginalne raspodele verovatnoća
 - uslovne raspodele verovatnoća promenljive X pod uslovom $Y=0.5$
 - uslovne raspodele verovatnoća promenljive Y pod uslovom $X=2.5$
 - $E(X/Y=0.5)$, $E(Y/X=2.5)$
4. Dobijen je uzorak na osnovu 100 obavljenih merenja pojava X i Y

(X,Y)	(1,2)	(1,1)	(1,0)	(2,2)	(2,1)	(2,0)
f_{xy}	10	30	20	6	18	16

- na osnovu uzorka odrediti približno raspodelu verovatnoća dvodimenzionalne veličine (X,Y)
- uslovni zakon raspodele verovatnoća slučajne veličine Y kada je $X=1$
- $\sigma^2(Y/X=1)$
- da li je varijabilitet Y veći od varijabiliteta $Y/X=1$

5. Posmatrajmo sledeću raspodelu verovatnoća dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y)

	Y	0	1	2
X				
0		2p	2p	2p
1		p	4p	p

- odrediti p
 - da li su X i Y nezavisne
 - koliki je koeficijent korelacije X i Y
 - kakav zaključak se može doneti o koeficijentu korelacije i nezavisnosti
6. Slučajna veličina (X,Y) data je gustinom (zakonom verovatnoća)
- $$f(x, y) = \begin{cases} 2 & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{van} \end{cases}$$
- odrediti marginalne gustine za X i Y
 - uslovni zakon verovatnoća za X pod uslovom da Y uzme određenu vrednost
 - očekivanje i disperziju za X pod uslovom da Y uzme određenu vrednost
 - da li su slučajne veličine X i Y nezavisne
7. Slučajna veličina data je zakonom verovatnoća. Izračunati koeficijent korelacije ρ .

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{van} \end{cases}$$

8. Slučajna veličina (X,Y) ima uniformnu raspodelu.

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{van} \end{cases}$$

Izračunati:

- $P\{X > 0,4; Y > 0,8\}$
 - $P\{X < 0,4\}$
9. Dvodimenzionalna slučajna veličina (X,Y) data je zakonom verovatnoća

$$f(x, y) = \begin{cases} axy & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{van} \end{cases}$$

- odrediti nepoznatu konstantu
 - odrediti marginalni zakon verovatnoće za X
 - uslovni zakon verovatnoća $f(y/x)$
10. Slučajna promenljiva (X,Y) ima zakon verovatnoća.
- $$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & x > 0, y > x \\ 0 & \text{van} \end{cases}$$
- odrediti marginalne zakone verovatnoća
 - ispitati nezavisnost promenljivih X i Y
 - odrediti uslovnu verovatnoću $P(X > 2/Y = 4)$

11. Neka su X i Y neprekidne slučajne promenljive sa zajedničkom gustinom

$$f(x, y) = x + y, \quad 0 < x, y < 1$$

Naći:

- a. $E(X), \sigma^2(X)$;
 - b. $E(Y), \sigma^2(Y)$;
 - c. Kovarijansu, koeficijente linearne korelacije i determinacije;
 - d. Regresione prave Y po X i X po Y ;
 - e. Regresionu krivu Y po X .
12. Broj X izabran je na slučajan način iz skupa brojeva $\{1,2,3,4\}$. Zatim se broj Y bira na slučajan način između onih brojeva istog skupa koji nisu manji od već izabranog broja X . Izračunati koeficijent korelacije između X i Y .
13. Pravilna kocka, čije su strane numerisane brojevima od 1 do 6, baca se 2 puta i posmatraju se slučajne promenljive: X – predstavlja broj koji se pojavljuje pri prvom bacanju, Y – predstavlja broj koji se pojavljuje pri drugom bacanju. Neka je $Z = \min\{X, Y\}$ i $V = |X - Y|$. Odrediti:
- a. zakon raspodela verovatnoća slučajne promenljive (Z, V)
 - b. marginalne raspodele za Z i V
 - c. $E(Z | V=3)$

14. Dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X, Y) data je zakonom verovatnoća:

$$f(x, y) = \begin{cases} q & x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0 & \text{van} \end{cases}$$

- a. Odrediti konstantu q
- b. marginalne gustine raspodela za X i Y
- c. $E(X)$ i $E(Y)$