

TEORIJA VEROVATNOĆE JEDNODIMENZIONALNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

- U kutiji se nalaze kuglice numerisane brojevima od 1 do 5. Broj kuglica u kutiji je u sledećoj razmeri 2:5:4:3:1, respektivno, u odnosu na oznake od 1 do 5. Neka je X slučajna veličina koja predstavlja broj na kuglici.
 - Odrediti zakon raspodele verovatnoće slučajne promenljive X
 - Izračunati matematičko očekivanje i disperziju za X
- Za slučajnu promenljivu X zna se da ima Puasonovu raspodelu. Za nekoliko prvih vrednosti data je raspodela verovatnoća:
$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \text{ i više} \\ c & 0.07326 & 0.146525 & 0.195367 & 0.566529 \end{pmatrix}$$
 - Odrediti konstantu c
 - Odrediti matematičko očekivanje i disperziju
- Slučajna veličina ima Normalnu raspodelu sa parametrima 6 i 4. Izračunati verovatnoću da
 - X bude između 6 i 7
 - X bude između 2.1 i 8.2
- Verovatnoća pogađanja u cilj u svakom od 100 nezavisnih gađanja je 0.8. Izračunati verovatnoću da će od 100 obavljenih gađanja
 - Biti bar 80 pogodaka
 - Broj pogodaka biti između 40 i 90
- Slučajna veličina X ima uniformnu raspodelu na intervalu (1,3).
 - Odrediti i skicirati gustinu
 - Odrediti i skicirati funkciju raspodele
 - Izračunati matematičko očekivanje i disperziju
 - Izračunati verovatnoću da X upadne u interval (1.5, 2.5) i (2.5, 3.5)
- Defektne sijalice se javljaju u 2% slučajeva. Sijalice su pakovane u kutije od po 100 komada. Izračunati verovatnoću da
 - Broj defektnih sijalica u kutiji nije veći od 3
 - U kutiji nema defektnih
 - Koliko najviše defektnih sijalica može da bude u kutiji sa verovatnoćom od 0.999763
- Preduzeće u jednoj smeni proizvede 10000 artikala. Verovatnoća da je artikal defektan je 0.05, što ne utiče na isptavnost ostalih. U toku proizvodnje obavlja se 100% kontrola kvaliteta. Defektni artikli se odlažu u specijalno skladište. Za koliko defektnih artikala treba da bude podignuto skladište da se sa verovatnoćom 0.99, ono ne prepuni do kraja smene.
- Data je slučajna veličina X funkcijom gustine:
$$f(x) = \frac{2}{a} - \frac{2x}{a^2}, 0 < x < a$$
 - Odrediti funkciju raspodele slučajne veličine X
 - Verovatnoću događaja $a/2 < X < 2a$
- Slučajna veličina X predstavlja broj pobeda jedne ekipe na tri fudbalske utakmice. Ako se zna da je verovatnoća pobede te ekipe u jednoj utakmici 0.6 i ako se zna da se utakmice odigravaju nezavisno jedna od druge odrediti:
 - Zakon raspodele verovatnoće slučajne promenljive X

- b. Matematičko očekivanje broja pobeda u 3 utakmice
- c. Odgovarajuću varijansu

10. Verovatnoća proizvodnje defektnog artikla je 0.003. Izračunati verovatnoću da će od 1000 slučajno izabranih elemenata biti

- a. 4 defektna
- b. Bar jedan defektan
- c. Ne više od dva defektna

11. Slučajna veličina X data je gustinom (funkcijom gustine):

$$f(x) = \begin{cases} ax^n & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , x < 0 \wedge x > 1 \end{cases}$$

- a. Odrediti nepoznatu konstantu a
- b. Za $n=1$ skicirati gustinu i funkciju raspodele slučajne veličine X
- c. Odrediti verovatnoću da X upadne u intervale $(0, 0.5)$ $(0.5, 1.5)$

12. Data je slučajna veličina X sa funkcijom gustine

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & , x \in (0, 1) \\ 0 & , \text{van} \end{cases}$$

- a. Odrediti funkciju raspodele slučajne veličine X
- b. Odrediti verovatnoću događaja $1/2 < X < 1$
- c. Odrediti verovatnoću događaja $-1 < X < 1$

13. Data je slučajna veličina X sa zakonom raspodele verovatnoća: $X \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$. Odrediti matematičko

očekivanje i varijansu slučajnih promenljivih:

- a. $Y=X^2$
- b. $Z=0.5X-2$

14. Data je slučajna veličina X sa funkcijom gustine. Odrediti funkciju raspodele slučajne veličine X .

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x > 0, x > b \\ \frac{2x}{ab} & 0 \leq x \leq a \\ \frac{2x}{ab-b^2} + \frac{2}{b-a} & a < x \leq b \end{cases}$$

15. Radi utvrđivanja kvaliteta u velikoj seriji uzima se jedan proizvod i vrši kompletna analiza. Ako izabrani proizvod u potpunosti odgovara željenom kvalitetu, dalja analiza se ne vrši a ako ne odgovara bira se sledeći, vrši se njegova analiza itd. Neka je verovatnoća za svaki proizvod da odgovara željenom kvalitetu 0.8, a troškovi analiza su 2000 dinara. Kolika je verovatnoća da će troškovi kontrole serije biti manji od 5000 din?

16. Zakon verovatnoća slučajne promenljive X dat je izrazom:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x \leq 0, x > 1 \end{cases}$$

- a. Skicirati grafik funkcije gustine
- b. Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X i skicirati grafik
- c. Naći $P(0.3 < X < 0.5)$
- d. Naći $E(X)$

17. Zakon verovatnoća slučajne promenljive X je

$$f(x) = \begin{cases} ax & 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{van} \end{cases}$$

Odrediti:

- a. konstantu a a zatim i funkciju raspodele i skicirati grafike
- b. varijansu slučajne veličine X

18. Slučajna veličina X ima Normalnu raspodelu $X:N(5,5^2)$. Neka je

$$I = \begin{cases} 1 & x < a \\ 0 & x \geq a \end{cases}$$

- a. odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive I tako da je $E(I)=0.8$
- b. odrediti a

19. Slučajna veličina X ima χ^2 raspodelu sa 15 stepeni slobode. Odrediti

- a. Verovatnoću da je $6 < X < 10$
- b. Nepoznate krajeve tako da je $P(a < X < b) = 0.7$ i $P(X > a) = 0.8$.

20. Slučajna veličina ima χ^2 raspodelu sa 32 stepena slobode. Izračunati verovatnoću $P(24 < X < 40)$.

21. Slučajna veličina ima χ^2 raspodelu sa 30 stepeni slobode. Posmatra se interval sa granicama $(X; 1.081X)$. Kolika je verovatnoća da će tačka $x=36.25$ biti prekrivena intervalom?

22. Slučajna veličina ima Studentovu raspodelu sa 20 stepeni slobode. Odrediti

- a. Verovatnoću da je $-0,5 < X < 1$
- b. Konstantu b tako da je $P(|x| > b) = 0.6$.

23. Slučajna veličina X ima Studentovu raspodelu sa 121 stepeni slobode. Izračunati verovatnoću da je X između

- a. 1 i 2
- b. -1 i 2

24. Slučajna veličina ima Fišerovu raspodelu sa $n_1=5$ i $n_2=10$ stepeni slobode. Odrediti konstantu b tako da važi $P(0.2 < X < b) = 0.90$ ako je $P(X < 0.2) = 0.05$.

25. Slučajna promenljiva Z ima Studentovu raspodelu sa **a.** 10, **b.** 100 stepeni slobode. Izr. verovatnoću da je $-1 < Z < 2$.

26. Slučajna veličina X uzima samo vrednosti 3 i 4. Ako je $E(X)=3.2$ odrediti zakon verovatnoća X .

27. Broj felera na kvadratnom metru tkanine je slučajna promenljiva sa Puasonovom raspodelom. Ako je srednji broj felera 0.8, kolika je verovatnoća da broj felera neće biti veći od 3?

28. Na jednom metru puta brzina prolaza automobila je slučajna promenljiva sa normalnom raspodelom, čija je srednja vrednost 60 km/h. Kolika je disperzija slučajne veličina pa da sa verovatnoćom od 95% tvrdimo da brzina slučajno izabranog automobila neće odstupiti od prosečne brzine za više os 10 km/h.

29. Brzina X automobila na putu ima Normalnu raspodelu $N(55,400)$. Ako vozač plaća kaznu Z za prekoračenje brzine od 60 km/h u iznosu Y na sledeći način, izračunati očekivanu veličinu kazne.

$$Z = \begin{cases} 10\text{€} & Y \leq 6 \\ 20\text{€} & 6 < Y \leq 12 \\ 30\text{€} & Y > 12 \end{cases}$$

30. Kontrolor proverava proizvode jedne partije koja sadrži 20% škarta i obustavlja proveru proizvoda kada naiđe na škart. Ako sa X označimo broj pregledanih proizvoda, odrediti raspodelu verovatnoća slučajne promenljive X .
31. Iz kutije koja sadrži 30 artikala, od kojih su 4 defektna, uzima se uzorak od 3 artikla. Neka je X broj defektnih artikala u uzorku. Odrediti srednju vrednost i standardnu devijaciju za X
- za slučaj izbora bez vraćanja
 - za slučaj izbora sa vraćanjem
32. U kutiji se nalazi jedna bela i jedna crna kuglica. Izvlači se jedna po jedna kuglica. Ako je izvučena kuglica bela, ona se vraća u kutiju i dodaju se još dve bele kuglice, a zatim se izvlačenje ponavlja. Izvlačenje se prekida ako se izvuče crna kuglica ili najduže posle šestog izvlačenja. Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj izvlačenja. Odrediti:
- zakon verovatnoća slučajne promenljive X
 - matematičko očekivanje i disperziju za X
 - $E(3X+6)$ i $\sigma^2(3X-7)$
 - verovatnoću $P(X < E(X))$
33. Slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu sa parametrima $m = 20, \sigma^2 = 4$. Izračunati sledeće verovatnoće:
- $P(18 < X < 24)$
 - $P(|X-20| < 3)$
 - $P(X < 25)$
 - $P(X=20)$
34. Neka slučajna promenljiva X ima raspodelu $X : U(0, b)$. Ako je $P(X < 1,5) = 3/4$, naći $\sigma^2(x)$.
35. Za slučajnu promenljivu X , sa funkcijom raspodele odrediti:
- $$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{\sqrt[4]{x^2}}{2} & , \quad 0 < x \leq 4 \\ 1 & , \quad x > 4 \end{cases}$$
- Funkciju gustine
 - Medijanu, očekivanu vrednost i standardnu devijaciju
 - Izračunati verovatnoću $P(2 < X < a)$, gde je $a \in R, a \in [5, 6]$
36. Slučajna promenljiva X ima raspodelu čija je funkcija gustine data sa $f(x) = ae^{-\lambda|x|}$, ($\lambda > 0$)
- odrediti konstantu a
 - odrediti funkciju raspodele
 - izračunati $P(0 < X < 2)$
37. U kutiji se nalazi po jedna bela i jedna crna kuglica. Izvlači se jedna po jedna kuglica. Ako je izvučena kuglica crna, ona se vraća u kutiju i dodaju se još tri crne i jedna bela kuglica, a zatim se izvlačenje ponavlja. Izvlačenje se prekida ako se izvuče bela kuglica ili najduže posle petog izvlačenja. Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj izvlačenja. Odrediti:
- zakon raspodele slučajne promenljive X
 - matematičko očekivanje i disperziju za X
 - $E(2X + 8)$ i $\sigma^2(2X + 9)$
 - verovatnoću $P(X \geq E(X))$